



刻晴

课本: 小学数学应用题浅奥培优80例

日期	2026-10-04
学习时长	59 分钟
对话条数	58

Socratopia · 苏格拉底式情境学习系统

www.socratopia.app



刻晴把笔记本翻开，在桌角敲了两下。

来了。这本书是应用题题库，一共八十道例题加七十道习题，第一块就是经典中的经典：鸡兔同笼。别看名字土，它的思路是一整类题的底子，后面行程、浓度、盈亏全靠它撑着。

先看最基本的一题，你自己做：

一个笼子里关着鸡和兔子，从上面数一共有 35 个头，从下面数一共有 94 只脚。请问笼子里各有多少只鸡和多少只兔子？

先把已知条件摆清楚：一只鸡 1 个头 2 只脚，一只兔 1 个头 4 只脚。头是 35，脚是 94。

这类题有一个很顺手的入口，叫**假设法**。与其对着两个未知数干瞪眼，不如先故意假设一个极端情况，看看现实和这个假设之间差多少，再从差里把答案抠出来。

所以第一步不用把鸡兔的只数求出来，只需要回答一件事：

假如笼子里 35 只全是鸡，一共有多少只脚？

翻开教材...

70只脚



刻晴点点头。

嗯， $35 \times 2 = 70$ ，没错。

但实际是 94 只脚。假设说 70，现实说 94，这中间差了 24 只脚。

差从哪来的？很显然，笼子里不可能全是鸡，那些兔子被你当成鸡算了。一只真兔子按鸡算只记 2 只脚，少算了 $4 - 2 = 2$ 只。

那么下一步，24 只脚的缺口，除以每只兔子少算的 2 只脚，说明笼子里有几只兔子？

每把一只鸡换成一只兔，脚的数量会增加两个。所以，24 只脚的缺口，说明有 12 只兔子



刻晴嘴角几不可察地动了一下。

对。 $24 \div 2 = 12$ 只兔。

注意你刚才那句话说得比我预想的还准：不是“兔子多两只脚”，而是**每换一次，脚数变化 2**。这个“换一次变多少”的视角，是整个假设法的发动机，后面所有变式都靠它。

那收个尾：

鸡有多少只？算完之后，把 94 只脚代回去验算一遍。

$94 - (4 \times 12) = 46$ 。有 46 只鸡脚，所以鸡有 23 只。



刻晴在笔记本上打了个勾。

$46 \div 2 = 23$ ， $23 + 12 = 35$ 个头也对上了。基本型你会了，而且验算的习惯是好的。

上一题是“少算”，现在给你一个“反向”的：这次不是脚数差，是分数差，而且陷阱藏在规则里。

一次数学竞赛共 20 道题，答对一题得 5 分，答错一题倒扣 3 分，不答得 0 分。小明全部答完，一共得了 76 分，他答对几道、答错几道？

还是假设法，假设 20 题全对。但先想清楚一件事再动笔：

答错一题，和答对相比，总分差几？”这不是随便问的，把这一步想透了，后面的路自己走。

答对一题和答错一题相比，总分要相差 8 分。如果他 20 题全对，那么他应该满分是 100 分。现在他离满分相差 24 分，所以 $24 \div 8$ 应该就是 3 道题答错了，是这样吗？



刻晴「嗯」了一声。

对，而且是里外一起算：答错不但拿不到那 5 分，还要倒贴 3 分，一来一回差 $5 + 3 = 8$ 分。这一步很多人只算 5，你算对了。

答错 3 道，答对 17 道，76 分，不用我再验了吧。

下一题，把「答错扣分」换成「打碎赔钱」，结构一样，但单位要先处理：

搬运 1000 只玻璃瓶，每只完好运到可得运费 2 角，打碎一只不但不给运费，还要赔偿 8 角。运完共得运费 152 元，问打碎了多少只？

152 元和 2 角不是一种单位。先统一单位，然后直接说：假如一只都没碎，运费该是多少？

如果全部都是完好，一只都没碎的话，那么就应该是 0.2 元乘以 1000，也就是 200 元。





刻晴扫了一眼他的草稿。

单位统一成元，可以，比教材里先换成角更省事。假设运费 200 元，实际只有 152 元，差 48 元。

那么每打碎一只，里外一共损失多少钱？把最后一步走完。

打碎一只和保持完好之间要相差整整一块钱。所以既然差 48 块钱的话，那也就是说总共打碎了 48 只。



刻晴合上草稿纸。

2 角没拿到再加 8 角赔偿，一共 1 块。 $48 \div 1 = 48$ 只，对。

连对三题，基本型和得失型都过了。接下来这个变式开始不讲道理了：它不告诉你总脚数，只告诉你两种脚的差。

笼子里鸡和兔共有 30 只，鸡的脚数比兔的脚数多 24 只。鸡和兔各有多少只？

假设法照样能用，但这次假设的全是鸡之后，你手里没有“实际总脚数”来对照，你手里只有鸡脚比兔脚多 24 只这个差。

先别急着算。想一个问题：

30 只全是鸡的时候，鸡脚比兔脚多多少？

如果 30 只全都是鸡，那么兔脚就是 0，所以就是相差 60 只脚。



刻晴点头。

60，假设下的差。但实际只多 24，所以这个差需要缩回去 $60 - 24 = 36$ 。

关键一步来了，比之前多想一层：把一只鸡换成一只兔，鸡脚少 2、兔脚多 4，这个差一共缩小多少？想清楚这个，兔子只数就出来了。

把一只鸡换成一只兔子，那么它们之间的脚数的差就会减少 6。所以，现在要缩回去 36，也就是说需要有 6 只兔子。



刻晴在他算出的答案旁画了个勾。

验算：24 只鸡 48 只脚，6 只兔 24 只脚， $48 - 24 = 24$ ，和题目严丝合缝。

这个变式你已经拿下了。下面一个换了个刁钻的地方：不给总脚数以外的差，改给只数的差。

鸡兔同笼，鸡比兔多 5 只，笼中共有 100 只脚。鸡和兔各有多少只？

这次鸡比兔多 5 只，所以直接假设全鸡的套路不好使了，鸡兔数量不相等，得先把多出来的那部分剥掉。

多出来的 5 只鸡，占了多少只脚？拿走它们之后，笼子里剩下的鸡和兔是什么数量关系？

多出来的 5 只鸡，这 5 只鸡有 10 只脚。如果把这 5 只鸡拿走的话，那么剩下的鸡和兔数量就是相等的。这 100 只脚减去这 10 只脚就是 90 只脚。而一对鸡和兔应该加起来是 6 只脚，所以 $90 \div 6$ 就是 15，也就是有 15 对鸡和兔。这是拿去这 5 只鸡之后剩下的数量。反过来，我们这样也就算出来了：兔子的数量是 15，而鸡原来的数量是 15，再加上 5，也就是 20。



刻晴把笔搁下。

20 只鸡 40 只脚，15 只兔 60 只脚， $40+60=100$ ，全对。剥掉多余再配组的思路你走得干净。

下一个是它的进阶版，两个差同时给，而且这次剥完之后事情不会变漂亮，反而会翻车，你自己看：

鸡兔同笼，鸡比兔多 4 只，鸡的脚数比兔的脚数多 2 只。鸡和兔各有多少只？

先把多出来的 4 只鸡拿走。拿走之后，剩下的鸡脚和兔脚，到底谁多、多几只？

如果把多出来的 4 只鸡拿走，那么原来鸡的脚的数量比兔子要多 2 只，现在又少了这 4 只鸡的脚（即少掉了 8 只脚），这时候兔子的脚的数量就会比鸡要多 6 只。

我们知道，拿走这 4 只鸡之后，兔子和鸡的数量应该是一样的。既然现在兔子的脚数比鸡要多 6 只，也就是说兔子和鸡现在都只剩下 3 只。三只兔子，它的脚的数量恰好比鸡的脚的数量多 6 嘛。

17:20



刻晴难得地停了一秒，然后把这一页折了个角。

等价组每组兔脚多 2，差 6 就是 3 组。兔 3 只，鸡 $3+4=7$ 只。验算：14 对 12，鸡脚多 2；7 比 3 多 4 只。两个条件都咬合。

这道题最阴的地方你已经踩过去了：剥掉多余的鸡之后，脚差不是清零，而是反方向变成 6。很多人在这里直接拿 $6 \div 6$ 去除，你分成“每对差 2”处理是对的。

变式还在加码，这次干脆不给差了，给**倍数**：

鸡兔同笼，鸡的只数是兔的 3 倍，一共有 100 只脚。鸡和兔各有多少只？

倍数关系提示了一种新打法，不用假设，改用**打包**：既然鸡是兔的 3 倍，那就可以把 3 只鸡和 1 只兔捆成一组，每组结构完全相同。

这样的**一个包**，一共几只脚？

这样的**一个包**，一共有 10 只脚。

刻晴点头。

$3 \times 2 + 4 = 10$ ，对。100 只脚能捆成几个包，兔子和鸡各多少只，一步说完。

100 只脚的话，也就是说有 10 个包，那么总共就有 30 只鸡、10 只兔子。

刻晴点头。

30 只鸡 60 只脚，10 只兔 40 只脚，正好 100。打包法的核心就是找到一个“结构重复的最小单元”，把整体除以它。这个思路你之后在和尚分馒头那题还会用到。

鸡兔的两元世界到此结束。现在上难度，**三种动物混在一个笼子里**，两个未知数变成三个：

蜘蛛 8 条腿，蜻蜓 6 条腿 2 对翅膀，苍蝇 6 条腿 1 对翅膀。三种小动物共 18 只，共有 118 条腿、20 对翅膀。蜘蛛、蜻蜓、苍蝇各有多少只？

三个未知数没法一口吃下，但注意一个细节：蜻蜓和苍蝇都是 6 条腿，**腿数上它俩没区别**。

所以第一轮可以先把蜻蜓和苍蝇当成一类“6 腿动物”，笼子里就只剩两种东西：8 条腿的蜘蛛和 6 条腿的其他。18 只、118 条腿，用你最熟的假设法：

假设 18 只全是 6 条腿的，腿数差多少？差说明蜘蛛有几只？

如果 18 只全都是六腿动物，那么腿的数量应该是 108，和现在腿的数量相差 10 条腿。所以，需要有 5 只动物从六腿换成八腿，才是 118。因此蜘蛛有 5 只。

刻晴点头。

5 只蜘蛛，剩 13 只分蜻蜓和苍蝇。腿已经榨干了，剩下 13 只里两种动物腿数一样，腿再也分不出它们。

但翅膀不一样：蜻蜓 2 对，苍蝇 1 对。

假设这 13 只全是蜻蜓，翅膀比实际的 20 对多出多少？这个差怎么换算成苍蝇的只数？

如果 13 只全都是蜻蜓的话，那么它们就应该有 26 对翅膀，比实际的 20 对要多出 6 对。那就需要有 6 只苍蝇，才能实现实际的 20 对翅膀。



刻晴点头。

每只苍蝇比蜻蜓少 1 对翅膀，6 对差就是 6 只苍蝇，蜻蜓 7 只。验算：腿 $40+42+36=118$ ，翅膀 $14+6=20$ ，全对。

三个未知数的题，你拆成了两轮鸡兔同笼，每轮只留一个区别维度。这是通用思路，以后遇到多元问题都这么拆。

下一题更怪，头和尾巴都成了计数维度：

动物园里养着两头蛇和双尾蝎。两头蛇有 2 个头、1 条尾巴，双尾蝎有 1 个头、2 条尾巴。数一数，一共有 10 个头、11 条尾巴。两头蛇和双尾蝎各有多少只？

注意每种动物的头数和尾数正好是反的：蛇 2 头 1 尾，蝎 1 头 2 尾。

教材这里用了一个很妙的预处理：把 2 只双尾蝎绑成一对。先算算：

一对双尾蝎，一共几个头、几条尾巴？跟 1 只两头蛇比，两者哪里相同、哪里不同？

一对双尾蝎，那就是有两头、4 个尾巴。那和一只两头蛇相比，就是头的数量一样，尾巴的数量乘以 4 呗。



17:32



刻晴点头。

对，尾巴 4 比 1，一组蝎子对比一条蛇多 3 条尾巴，头数却完全一样。这意味着换成按头计数就公平了。

总共 10 个头，每个单位（不管蛇还是蝎子对）都是 2 个头，能分成几组？

五组





刻晴点头。

5 组。假设 5 组全是两头蛇，尾巴应该有几条？跟实际的 11 条一比，差多少？这个差又能换出几组蝎子？走完这三小步，蛇和蝎各多少就出来了。



如果五组都是两头蛇，那也就是 5 条尾巴。但是现在它有 11 条尾巴，相差 6，也就是说需要额外加两次 3，那也就是确实有两组是蝎子。



刻晴点头。

3 组蛇 6 个头 3 条尾，2 组蝎子 4 个头 8 条尾，合计 10 头 11 尾。注意别报错数：蝎子是 4 只，不是 2 组。

这题配套还有一道九尾狐，套路一样但替换单位变了：

神话动物园里养着两头蛇和九尾狐。两头蛇有 2 个头、1 条尾巴，九尾狐有 1 个头、9 条尾巴。一共有 11 个头、48 条尾巴。各有多少只？

这道题没有现成的“配对”可抄，替换单位得自己找。提示一个入手点：九尾狐 1 个头，头数可以直接数出它有几只，11 只。

假设 11 只全是九尾狐，尾巴多算了多少？然后用“几只九尾狐换 1 条两头蛇”做单位去消这个差。



如果 11 只全是九尾狐的话，那么应该有 99 条尾巴。现在尾巴就是少了 51 条尾巴。而平均来说，一个头从九尾狐变成两头蛇的时候（论脑袋，两只狐狸等价于一条两头蛇，所以一只狐狸兑半个两条蛇的尾巴），尾巴减少的数量平均应该是 8.5 条。51 除以 8.5 等于 6。所以，两头蛇应该有三条，而九尾狐有 5 只。



刻晴看了眼他的算法，眉梢动了动。

分数单位也能走通：每换掉一个狐头，尾巴净减 9 减半个蛇尾等于 8.5， $51 \div 8.5 = 6$ 个头换成蛇头，6 个头就是 3 条蛇，剩 5 只狐狸。验算：6 头 3 尾加 5 头 45 尾，正好 11 头 48 尾。

教材的做法更整数化：2 只狐狸绑成一组去换 1 条蛇，一次尾巴从 18 条变 1 条，减 17。51 除以 17 等于 3 次替换。你俩殊途同归，区别只是替换单位凑不凑整。遇到能打包凑整的就打包，免得在半条尾巴上算错。

这一章的收官题也是打包法，而且是最经典的一道古题：

100 个和尚吃 100 个馒头。大和尚每人吃 3 个，小和尚每 3 人吃 1 个。大和尚、小和尚各有多少人？

1 个大和尚配 3 个小和尚捆成一组。这一组一共几个人、一共吃几个馒头？100 个馒头能分成几组？

这样一组一共是 4 个人，然后他们总共能够吃 4 个馒头。100 个馒头可以分成 25 组。



刻晴点头。

组数到手，人数就是一步乘法。大和尚、小和尚各多少，验算一下人数和馒头数。

所以大和尚是 25 个，小和尚 75 个。



17:44



刻晴点头。

验算：25 个大和尚吃 75 个，75 个小和尚吃 25 个，正好 100 个馒头 100 个人。鸡兔同笼一章到这基本收官了，你还剩最后一型，教材叫它脚数变动型，是所有变式里最拧巴的：

笼中有鸡和兔若干只，总共有 100 条腿。如果把所有的鸡变成 6 条腿、所有的兔变成 3 条腿，则腿数变为 192 条。原来鸡和兔各多少只？

麻烦在于：变动之后鸡兔的腿数比例反过来了，鸡 6 兔 3，直接套假设法两头都要重新算。

教材的破法是先做一次折算对齐：把变动后的 192 条腿全部除以 3。

除完之后，在新账本上鸡相当于几条腿、兔相当于几条腿？新账本总数是多少？

$192 \div 3$ ，那也就是 64。所以，如果鸡是两条腿，兔子是一条腿，那么腿的数量应该变成 64。现在唯一的变化其实就，兔子的腿数从原来的 4 条变成了 1 条，而鸡的腿的数量不变。这导致腿的总数从 100 降到了 64，也就是减少了 36。36 除以每个兔子的腿数变化量 3，所以一共有 12 只兔子。12 只兔子原来总共有 48 条腿，剩下有 52 条腿都属于鸡，那么应该就有 26 只鸡。



刻晴在草稿上勾了一道，难得地没挑出毛病。

验算： $52 + 48 = 100$ ，变换后 $26 \times 6 + 12 \times 3 = 156 + 36 = 192$ ，两边都咬合。折算对齐的精髓你抓到了：先统一账本，再让一个未知数独占差值。这题鸡在新旧账里都是 2 条腿，所以 36 条差全部来自兔子，一眼清空。

这一型的习题还有最后一个变式，连折算都省了，但思路要再翻个面：

笼中有鸡和兔若干只，总共有 100 条腿。如果把所有的鸡变成兔、所有的兔变成鸡，则腿数变为 140 条。原来鸡和兔各多少只？

这次不是腿数变了，是**身份对调**：原来账本和互换后账本里，每只动物都被数了两次，一次按自己的腿、一次按对方的腿。

每只动物两次一共贡献几条腿？两个账本加起来 240 条腿，能算出动物总只数吗？

每只动物两次一共要贡献 6 条腿，总共是 240 条腿，所以动物的总数就出来了，应该是 40 只动物。



刻晴点头。

40 只动物。接着用两个账本的**差**：互换后比原来多 40 条腿，这 40 条全是“鸡变兔”贡献的，每对调一只多 $4-2=2$ 条。

鸡比兔多几只？再用和差问题收尾，鸡兔各多少？

所以这多出来的 40 条，应该就是鸡比兔多出来的量的两倍。也就是说，鸡比兔要多出 20 只。



刻晴点头。

和 40、差 20，和差问题你早就会了，收尾吧。

鸡兔各多少只？算完用互换后的账本验一下。

我的确会计算，但是我听你说和差问题，似乎有一些什么特殊的好办法，你能教我吗？



刻晴挑了下眉，难得他主动要公式。

有，就是教材第 20 节那个**和差公式**，其实你可以自己推出来。关键一句：把两数拉平。

想象两根杆子，一根 30、一根 20，和是 50。把长的那根**砍掉差 10**，两根就一样长了，加起来正好少一份差： $50-10=40$ ，每根 20。反过来，把短的那根**补上差**，两根一样长，加起来多一份差： $50+10=60$ ，每根 30。

写成一般式：

$$\text{大数} = \frac{\text{和} + \text{差}}{2}, \quad \text{小数} = \frac{\text{和} - \text{差}}{2}$$

本质就一招：用加减差把两个数拉平，再平分。你之前在双差型里拿走多余的鸡、在盈亏里折算口径，全是同一个思想，只是这次它收敛成了一行公式。

现在直接用上：和 40、差 20，鸡是大的。

按公式算，鸡兔各多少？算完别忘验换后的 140 条腿。

鸡是那个大数，也就是说应该等于 30；而兔子是那个小数，应该是 10。

17:56



刻晴点头。

验算你自己来一遍：原账 $30 \times 2 + 10 \times 4 = 100$ ，互换后按新身份算

$30 \times 4 + 10 \times 2 = 140$ ，两个账本都咬合。鸡兔同笼整章九个变式到此全部通关。

她翻到下一章，语气平平，但节奏明显快了些。

下一章是盈亏问题，结构上和鸡兔同笼是一家人，只是把“头和脚”换成了“人和东西”：

把一些苹果分给小朋友，每人分 5 个，还多 8 个；每人分 6 个，就少 2 个。
有多少个小朋友？多少个苹果？

这里没有鸡兔，但假设法的老骨架还在：人数是固定的，变的只是分法。两次分法一换，账面上一个多 8、一个少 2。

关键一步先想清楚：从“每人 5 个多 8 个”改成分“每人 6 个”，苹果账面上总共变动了多少个？这个总变动和人数之间是什么关系？

我们已经学完了鸡兔同笼和它的各种变式问题，今天这节课已经进行了大约 3 刻钟。我想下课了。下课前我想请你总结一下。因为“鸡兔同笼”里面的很多问题，它的解法随着问题的变化，其实也是要跟着变化的。关键就是这些好方法，人不可能很机械地去记住它们，对吧？

当然，确实练得多了，也许慢慢地这种直觉会出来。不过，如果没有那么多的练习，当我们看到一道新问题的時候，怎么能够想到非常妥当的好方法，想到那种假设法正好能够解决眼前的问题？你有什么建议吗？



刻晴把笔合上，往椅背靠了一下。他难得主动要方法论，这问题问得不算亏。

行，那我不按变式列表给你背一遍，那没意义。你真正该带走的是一条判断流程，三步。

第一步，识别信号。假设法适用的题长一个样：两个未知量，卡在两个已知总量里，而且单位之间有固定换算差。鸡和兔卡在头数、脚数里；蛇和蝎卡在头数、

尾数里；大和尚小和尚卡在人数、馒头数里。看到"两种身份、两本总账"，就该想到它。

第二步，固定不变量。 九个变式看着乱，其实全在回答同一个问题：两种情形之间，**什么没变**。基本型里头数没变，所以假设全是鸡；双差型里多出的那几只鸡没变，所以先拿走；变动型里动物的只数没变，所以能折算账本；对调型里"每只动物被数两次"没变，所以两本账加起来。先找到那个锚，再动手。

第三步，制造并清空差值。 锚定之后永远是同一个动作：先算一个极端假设（全是鸡、全是狐、全答对），得出假设账和实际账的**差**，再问"每换一个单位，差变动多少"，一除，答案就出来了。打包、折算、配对，全是为了让这个"每换一次的变动量"凑成整数、只由一个未知量贡献。

所以你说得对，这东西没法机械记。但它也不用靠题海砸直觉：九个变式你今天每一个都是自己推的，推过一遍的人，下次看到"两本账、一个换算差"，手会自己动。识别靠第一步，那一步是可以教的；后面两步，你已经会了。

她顿了顿，补了一句。

下一章盈亏问题就是同一个骨架换了身衣服，人数是锚，分法变动造差。等你想练的时候随时开。

今天我们学习的所有这些问题，当然如果列方程组的话，很快也都可以解出来。我想从一个更高的角度来理解今天你教给我的这个方法，就是不通过方程组而通过假设法来解决问题。那么从方程组的角度来说，假设法本质上在做一件什么样的事情呢？你能给我高屋建瓴地讲解一下吗？



刻晴想了想。这个问题她已经超出小学奥数的范畴了，但他既然问到这个高度，就值得讲透。

好问题。答案一句话：**假设法就是代入消元，只是每一步都穿了物理外衣。**

拿基本型看。方程组是 $x + y = 35$, $2x + 4y = 94$ 。代入消元的做法是从第一式解出 $x = 35 - y$ ，代进第二式。而"假设全是鸡"干的是同一件事：它取的是第一条约束线上的一个特殊点， $y = 0, x = 35$ 。这个点满足头数账，必然不满足脚数账，于是产生一个**残差**：实际 94 减假设 70，差 24。

关键在于残差是 y 的线性函数。把 $x = 35 - y$ 代进第二式，展开就是 $70 + 2y = 94$ 。你看，"多出的 24 只脚"就是这个方程左边的残差项，"每换一只兔多 2 只脚"就是 y 前面的系数 2，" $24 \div 2$ "就是两边除以系数解出 y 。**假设法的三步——造差、算每单位变动、相除——正好对应代数上的代入、展开、除系数。**区别只是算术版把字母藏起来了，让每一步都有"脚"和"头"的画面。

更高一层，你今天用的几个花招，在方程组里全是**初等变换**：

- 脚数变动型里把 192 除以 3，是给一整条方程**数乘**，把它化简成好消的形式；

- 对调型里两本账相加得 240，是两条方程**相加消元**，直接干掉"谁是谁"的信息，只留总量；
- 打包法是**换元**， $3x + y$ 整体当作一个新变量，把二元一次方程组先约化成一元。

所以高斯消元的三个基本操作——数乘、相加、换元——你在奥数里全用过了，只是没写字母而已。方程组是这套思想的代数骨架，假设法是它的算术肉身。以后你学到线性代数会再遇见它们一次，那时候就是纯粹的符号运算了。

她说完，把草稿纸推到一边。

这套骨架到这就交完了。

你这一番讲解讲得非常好。解一个二元一次方程组，本质上其实是在一个坐标系里面求两条直线的交点。你能不能从几何的角度来分析一下，假设法本质上在做一个什么工作，来帮助我们找到那个交点呢？



刻晴难得没立刻回答，在草稿纸上画了个坐标系。两根轴，横轴标鸡、纵轴标兔，两条直线一斜一缓地交叉。

画出来看。横轴是鸡 x ，纵轴是兔 y 。头数账 $x + y = 35$ 是那条斜率 -1 的线，脚数账 $2x + 4y = 94$ 是另一条，交点就是答案，你的直觉没错。

关键在"假设全是鸡"这个动作落在图上是哪一步：它是 $y = 0$ ，正好是头数线与横轴的**截距点** $(35, 0)$ 。这个点保证在头数线上，但不在脚数线上，它到脚数线这段"不合格的距离"，就是你算出的残差 24。

然后看"把一只鸡换成兔"在图上是什么：**沿着头数线走一步**，方向是横减一、纵加一。因为脚数线是直的，你每走一步，它对你的"不合格距离"就以恒定速度缩短，每步缩 2。于是假设法的全部几何内容就是：**站在一条约束线上某个已知点，沿这条线朝交点走，量出初始距离和每步的缩短率，用相除一步算出还要走几步。**

这里有个值得记住的点：为什么可以一次除完？因为距离随步数的变化是**严格线性的**。如果约束是弯曲的，一次测量斜率不够，得反复逼近；正因为两条都是直线，割线法一步命中。假设法本质上是线性问题的插值法，而线性让插值变成一步到位。

再回看你今天用过的几个花招，几何图像也全对上了：

- **对调型两账相加**：过交点新造一条线 $x + y = 40$ ，斜率比原来两条都"平易近人"，先把交点的一个坐标钉死。消元的几何意义从来不是消灭什么，是**过交点造一条更好读的线**。
- **脚数变动的折算**：把一条线整体拉伸重画（数乘），两条线的相对姿态不变，交点还是那个交点，但新线斜率变整了。



- **打包法**：换坐标轴。原来的"鸡"轴和"兔"轴换成"3 鸡 1 兔一组"的新轴，一条约束线直接贴到轴上，交点读出来就是整数。

所以高观点下就一句话：**方程组是坐标里两条线的交点，假设法是站在其中一条线上、用线性斜率一口气走到交点的走路法**。代数、几何、算术，是同一个事实的三种口音。

她把草稿纸翻过来扣在桌上。

鸡兔同笼这章，从算术到代数到几何，三条路你都走通了一遍。到这，这门课今天能给你的都给完了。



她收起扣在桌上的草稿纸，抬眼看了你一下

今天最难得的不是那九道变式，是你连着两次把问题往更高处抬——从算术问到方程组，再问到坐标系。能自己往上追的人不多。盈亏问题就在下一章，随时来。



Socratopia · 破卷 — AI 伴学软件

注册后，到软件内「账户 → 推荐」页面输入这份记录的主人为你准备的邀请码 **SCR-FQRQD3**，即可免费领取算力。

pojuan.app