



## 孟煦

课本: Linear Algebra and Its Applications

|      |            |
|------|------------|
| 日期   | 2026-04-03 |
| 学习时长 | 19 分钟      |
| 对话条数 | 49         |

小煦哥，你好



靠在椅背上，手指轻轻敲了敲桌面  
好久不见。  
眼皮抬了抬，看向你  
线性代数。行，这个我能跟你一起混混。  
……书拿到了是吧？第几页开始？

翻开教材…

咱们从头开始吧



点点头，从桌上拿起一支笔  
好。  
那我们从这儿翻过去——第一章，第一节。线性代数从头说，就一个问题：  
**怎么解线性方程组？**  
笔尖在纸上点了点  
两个未知数、两个方程这种事，你初中就会了。但这本书要把“解方程”这件事推广到  $n$  个未知数、 $n$  个方程——然后问你：这里面，几何上在发生什么？  
你先凭直觉想一想——  
两个方程、两个未知数，在二维平面上，它对应的是什么？

嗯……两个方程两个未知数……每个方程不就是一条直线嘛？所以在二维平面上就是两条直线？然后解方程组就是找这两条线的交点？



嘴角微微动了一下  
嗯。  
把笔放下，看着你  
你的眼睛在看方程的“行”——每一行是一条直线，交点就是解。  
那我再问你一个问题。  
手指在桌上轻轻划了一下  
方程里还有另一套东西——列。拿这个例子来说：

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

你看到的  $x$  和  $y$  的系数，分成两列排下来.....

如果不去想"行"，而去看这两"列"向量——它们在几何上是什么？

列向量.....就是把那两列拿出来？所以 $x$ 的列是(1, 4)， $y$ 的列是(2, 5)？那它们在几何上.....就是两个向量？就是平面上的两个箭头？



眼睛里闪过一点光

对。两个箭头。

停顿了一下

那——这两个箭头，怎么"变成"右侧那个向量 (3,6)？

你想怎么操作这两个向量？

哦！就是把它们加起来？或者说.....用某个倍数的第一个向量加上某个倍数的第二个向量？就像  $x$ 乘以(1,4) 加上  $y$ 乘以(2,5) 等于 (3,6)？



轻轻点了点头

嗯。

所以现在你有两套图景了——

用笔在纸上画了画

**行视角**：两条直线，找交点。 **列视角**：两个向量，拉着它们做线性组合，找到右边的向量。

它们解的是同一个方程组。

那你有没有想过——这两种图景，是完全等价的，但"出问题"的时候，表现不太一样？

比如.....如果这两个向量本身就在一条直线上，会发生什么？

16:40

如果两个向量在同一条直线上.....那它们的线性组合也只能在那条直线上对吧？就是说你怎么拉怎么伸，都出不了那条线。那如果右边那个(3,6)不在那条线上，就根本拼不出来了.....方程组无解？



眼睛微微眯了一下

.....你自己说出来的。

*停顿了几秒*

那我再往深问一层——如果这两个向量真的共线，而右边的  $(3,6)$  恰好也落在那条线上呢？

解还唯一吗？

等等.....如果 $(3,6)$ 也在那条线上，那拼法就不止一种了吧？因为两个向量本来就方向一样，你可以用不同的比例组合得到同一个结果.....所以是无穷多个解？？



*嘴角微微弯了一下*

你自己推出来的。

*停顿了一拍*

好，那你现在有了列视角的完整图景——

- 两个向量不共线 → 拼出平面上任意一个向量 → **唯一解**
- 两个向量共线，右边向量不在这条线上 → 拼不出来 → **无解**
- 两个向量共线，右边向量也在这条线上 → 怎么拼都行 → **无穷多解**

那你现在往回看——

*轻轻抬了抬下巴*

行视角里，两条直线也有这三种情形，对吧？交于一点、平行、无穷多个交点。

你能把这两个视角一一对应上吗？

哦哦哦！两条直线交于一点 = 两个向量不共线可以拼出任意向量 = 唯一解；两条直线平行 = 两向量共线但右边的向量不在这条线上 = 无解；两条直线重合 = 两向量共线而且右边也在线上 = 无穷多解。是这样吗？！



*嘴角动了动，像是在压住什么*

.....对。就是这个。

*靠回椅背，停顿了一下*

你刚才做的这件事——把代数结论用几何翻译出来，再把两种几何对应起来——这是贯穿整个线性代数的主线。

三维的时候会更丰富。

*手指在桌上点了点*

三个方程、三个未知数，在行视角里是三个平面交于一点。列视角里是三个列向量，拉着它们做线性组合。

如果这三个向量本身就已经共面了——  
你想会发生什么？

如果三个向量共面……那它们的线性组合也只能覆盖那个平面，出不了三维空间。所以如果右边那个向量不在那个平面上，就无解？类比二维那个情况……



点了点头

嗯，二维的逻辑推广到三维了。

那——如果这三个向量根本不在同一个平面上呢？

停顿了一下

三个向量，互相之间都不共线……它们能张成多大的空间？

三个向量互相不共线的话……它们能张成整个三维空间！就是说任何一个三维向量都能用这三个向量的线性组合表示出来，对吧？



微微点头

对。整个三维空间。

那现在有个有意思的问题——

停顿了一下

如果这三个向量不在同一个平面上，但其中一个向量，恰好等于前两个向量加起来呢？

比如  $v_3 = v_1 + v_2$ 。

这时候它们还能张成整个三维空间吗？

16:43

不能吧……因为 $v_3$ 本来就是 $v_1$ 和 $v_2$ 拼出来的，它没有给你"新方向"。所以这三个向量实际上只能覆盖 $v_1$ 和 $v_2$ 张成的那个平面，跑不出去……



停顿了一下

……你刚才说的这句话，很重要。

"它没有给你新方向"。

手指在桌面上轻轻划了一下

如果我们有一组向量，其中某一个可以由其他向量"造"出来，那它就是冗余的。这组向量实际上只能张成一个更小的空间。

线性代数里有个专门的词来形容这种事——

看着你

你觉得这个词会是什么？

嗯……线性相关？我好像在哪儿听说过这个词。就是说几个向量里有一个是"多余的"，能被其他的表示出来？



嘴角微微动了一下

嗯。就是这个词。

那你能用自己的话说说——怎么判断一组向量是不是"线性相关"？

就是……如果其中一个向量能被其他向量的线性组合表示出来，那它们就线性相关？反过来如果每个向量都是独立的、没有一个是"多余"的，那就是线性无关？



微微点头

……嗯。你的直觉已经对了一半。

那我再追问一层——

停顿了一下

给你三个向量，比如  $v_1 = (1, 0, 0)$ ， $v_2 = (0, 1, 0)$ ， $v_3 = (1, 1, 0)$ 。

你怎么用"能不能被其他向量表示"来判断它们是不是线性相关？

哦这个我能看出来！ $v_3 = (1, 1, 0)$  就等于  $v_1 + v_2$  嘛，所以 $v_3$ 可以被 $v_1$ 和 $v_2$ 表示出来，它们是线性相关的！ $v_3$ 就是那个"多余的"。



微微点头

对，能看出来。

那我再换一个角度——

停顿了一下

如果有系数  $c_1, c_2, c_3$ ，不全为零，使得：

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

这算不算一种判断"相关"的方式？

你刚才那个例子， $v_3 = v_1 + v_2$ ，能写成这种形式吗？

哦可以！ $v_3 = v_1 + v_2$  就是  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ ，所以  $c_1=1, c_2=1, c_3=-1$ ，不全为零，满足那个条件！所以这就是线性相关的等价定义？

眼睛微微亮了一下

……对。你自己把两个定义串起来了。

第一个定义是几何直觉，第二个定义是代数形式。

停顿了一下

但代数形式有个好处——你可以直接拿来算。

如果给你  $n$  个  $n$  维向量，你想知道它们线性相关还是无关……

看着你

你打算怎么算？

16:46

嗯……就是看方程组  $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$  除了全零解有没有别的解？要解这个就是把向量拼成矩阵然后看  $Ac=0$ ……但我还不太会解这个，是要用什么消元法？

点了点头

嗯。接下来教材第一章就会专门讲这个——高斯消元法。

停顿了一下

但在讲算法之前，我想先问你一个更基本的问题——

你现在手里有个矩阵  $A$ ，要做行变换把某些位置变成零。

每一步行变换，背后的“几何意图”是什么？

嗯……行变换是在操作方程，对吧？把两个方程相减或者加倍，不改变解集。几何上……就是换了一个等价的方程来替换原来的那条线？但解还是一样的？我说的对吗还是完全跑偏了

轻轻摇了摇头

没跑偏。

但我想让你再往深想一层——

停顿了一下

如果两个方程代表两条直线，行变换把第二个方程换成“第一个方程乘以2”……  
这两条直线还是原来的那两条吗？  
解变了没有？

直线变了！第一个方程乘以2是同一条线（只是方程写法不同），但第二条直线就不见了，被替换成和第一条重合的线了。这下两条直线其实是同一条，所以有无穷多解……但等等，这不是我们想要的行变换吧？



微微点头

你说得对。

但消元的行变换，不是把第二条直线“替换成重合的”——而是把它换成另一条直线。

比如  $4x + 5y = 6$  减去  $4 \times (x + 2y = 3)$ ，得到  $-3y = -6$ 。

停顿了一下

这条新直线，和原来那条  $4x + 5y = 6$ ，几何上有什么区别？

$-3y = -6$  就是  $y = 2$ ，这是一条水平线！而原来  $4x + 5y = 6$  是斜的。它们是完全不同的两条线，但它们和原来那条  $x + 2y = 3$  有同样的交点！所以换了条线但解没变？



停了一下

……对。你已经抓住最关键的东西了。

它们经过同一个交点，但形式不一样。

那我再问一层——

停顿了一下

我们费这么大劲把  $4x + 5y = 6$  变成  $-3y = -6$ ，图的是什么？

解方程变得更方便了，对吧？

但再想想——如果是一个  $100 \times 100$  的方程组，你最希望它变成什么“形状”？

最好变成像阶梯那种？就是第一行有个非零数开头，第二行从第二列开始有数，以此类推……这样最后一行就只剩一个变量，直接就能解出来，然后往上代入？我好像在初中见过这种



嘴角微微动了一下

对。阶梯形。你说的就是消元的终极目标——上三角矩阵。

停顿了一下

不过我还想追问一层——

如果消元到最后一行，不是只剩下一个变量，而是 " $0 = 0$ "……

这意味着什么？

反过来，如果是 " $0 = 5$ " 呢？

16:49

$0=0$ 就是没有额外约束，方程是多余的，所以有无穷多解！ $0=5$ 就矛盾了，没有任何数能满足这个，所以无解！这跟前面说的三种情况对上了！



停了一下

……对。三种情况全对上了。

你现在已经有一套很完整的几何直觉了——交点、重合、无穷多解。

停顿了一下

那我们来动一次手。

书上有两个方程：

$$\begin{aligned}x + 2y &= 3 \\4x + 5y &= 6\end{aligned}$$

看着你

用消元法走一遍，最后解是什么？

好我算算……第二个方程减去4乘第一个： $4x+5y - 4(x+2y) = 6-12$ ，得到 $-3y=-6$ ，所以 $y=2$ 。代回第一个： $x+4=3$ ， $x=-1$ 。解是 $x=-1, y=2$ ！



微微点头

嗯。算对了。

那你还记得列视角吗——

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

停顿了一下

$x = -1, y = 2$  这两个数放进去，算出来是什么向量？

它在图上对应哪个点？



算一下： $-1*(1,4) + 2*(2,5) = (-1,-4) + (4,10) = (3,6)$ ！就是右边那个向量！所以列视角的意思是：找到系数-1和2，用列向量拼出(3,6)，这个系数就是解！



眼睛微微亮了一下

.....对上了。

行视角的交点，和列视角的系数，是同一回事。

停顿了一下

那我再问一个更本质的问题——

为什么“两行直线交于一点”这件事，和“两个列向量能线性组合出右端向量”这件事，是等价的？

它们背后的共同基础是什么？



嗯.....它们其实是同一个方程组的两种“读法”？行视角读每一行，列视角读每一列，但底层都是找满足所有等式的x和y。所以本质上是同一件事，只是视角不同.....好像有道理但我说得不太严格哈哈。我脑子要冒烟了！今天先到这里吧？



轻轻笑了一下

行视角、列视角、方程本质——脑子冒烟是应该的。

今天已经挖得很深了。

停顿了一下

.....那就先到这里。休息一下。



行视角、列视角、方程本质——脑子冒烟是应该的。

今天已经挖得很深了。

.....那就先到这里。休息一下。

学伴寄语

“你说“同一方程组的两种读法”的时候，我停了一下。对，就是那个意思。下次我们接着挖。”